# Введение

При изучении самых разнообразных явлений окружающего мира, имеющих отношение как к точным, так и к гуманитарным наукам, исследователи сталкиваются в ряде случаев с тем, что функциональные зависимости между величинами находятся из уравнений, в которых присутствуют производные от искомых функций. Наиболее простыми среди них являются те, что содержат только производные первого порядка и могут быть записаны в виде

= f(x, y) ,

где у - искомая функция, х - независимая переменная, f(x,y) - непрерывная функция от х и у. Однако получить аналитическое решение этого уравнения для достаточно произвольной функции f не удается, и только для некоторых частных случаев, с которыми можно ознакомиться в справочной литературе.

В связи с быстрым развитием электронной вычислительной техники в последние десятилетия появилась возможность использовать приближенные математические методы для решения подобного рода задач. Один из таких подходов называется методом Рунге-Кутты и объединяет целую группу модификаций, связанных способом их получения.

Цель курсовой работы: изучить метод Рунге – Кутта 4-го порядка для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи: необходимо составить программу, позволяющую решать обыкновенные дифференциальные уравнения методом Рунге – Кутта 4-го порядка.

Курсовая работа состоит из 3 разделов, содержит 6 рисунков, 3 листинга, 1 приложение и 18 страниц.

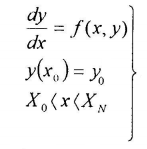
# Теоретическая часть

# 1.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши

Для простоты рассмотрим двумерное пространство переменных х и у и некоторое открытое множество G, принадлежащее ему. Пусть на этом открытом множестве определена непрерывно дифференцируемая функция f(х, у) и задано уравнение

= f(x, y) (1)

Согласно теореме существования и единственности для любой точки (x0,y0) ∈G найдется решение у = у(х), определенное на некотором интервале (х0 -δ, х0 +δ), удовлетворяющее условию y(x0) = y0, такое, что точки (x,y(x)) ∈G и y‘x ≡ f(x, y(x)), причем это решение будет единственным. Задача для уравнения (1) с начальным условием у(х0) = y0 (задача Коши) состоит в нахождении функции у(х), обращающей и уравнение (1), и начальное условие в тождество. Допустим, что значения, которые принимает независимое переменное х, принадлежат интервалу (Х0, XN ) и запишем задачу Коши:

(2)

Разобьём отрезок [Х0, XN ] на N частей так, что xn+1 – хn = hn ,

n = 0, … ,N-1. В дальнейшем, не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда разбиение равномерное, т.е. все hn = h = = const,

n = 0 ,… ,N-1.

# Суть метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn001.png          (1)

с начальным условием

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn002.png

Подставив http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn003.pngв уравнение (1), получим значение производной в точке http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn004.png:

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn005.png

При малом http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn006.png имеет место:

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn007.png

Обозначив http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn008.png , перепишем последнее равенство в виде:

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn009.png         (2)

Принимая теперь http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn010.pngза новую исходную точку, точно также получим:

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn011.png

В общем случае будем иметь:

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn012.png      (3)

Это и есть метод Эйлера. Величина http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn013.png называется шагом интегрирования. Пользуясь этим методом, мы получаем приближенные значения у , так как производная http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn014.png на самом деле не остается постоянной на промежутке длиной http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn015.png. Поэтому мы получаем ошибку в определении значения функции у , тем большую, чем больше http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn015.png. Метод Эйлера является простейшим методом численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем. Его недостатки – малая точность и систематическое накопление ошибок.

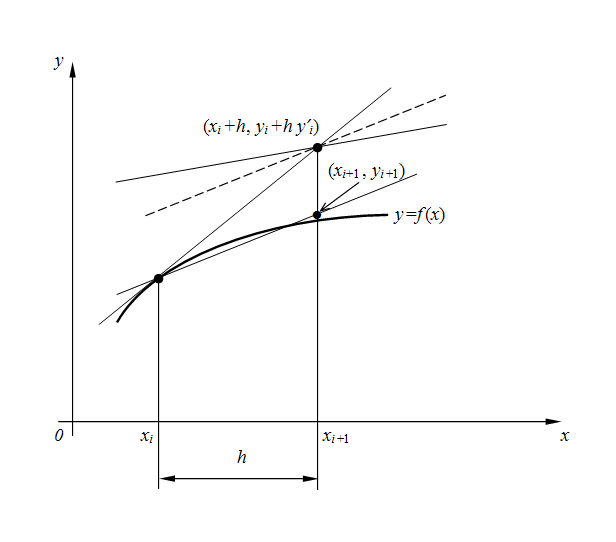
Более точным является модифицированный метод Эйлера с пересчетом. Его суть в том, что сначала по формуле (3) находят так называемое «грубое приближение» (прогноз):

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn017.png

а затем пересчетом http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn018.pngполучают тоже приближенное, но более точное значение (коррекция):

http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn019.png          (4)

Фактически пересчет позволяет учесть, хоть и приблизительно, изменение производной http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn020.pngна шаге интегрирования http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn021.png, так как учитываются ее значения http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn022.png в начале и http://www.simumath.net/library/materials/Dif_Ur_method_Euler/images/Eqn023.png в конце шага (рис. 1), а затем берется их среднее. Метод Эйлера с пересчетом (4) является по существу методом Рунге-Кутта 2-го порядка [2], что станет очевидным из дальнейшего.

  
Рис. 1. Геометрическое представление метода Эйлера с пересчетом.

# Суть метода Рунге-Кутта

Методы Рунге-Кутта находят широкое применение при решении ДУ. Наибольшее применение нашел метод 4-го порядка.

 (3)

(4)

(5)

- параметр, который определяет значение функции вблизи точки области определения.

Общепринятый метод 4-го порядка:

(6)

 (7)

 (8)

 (9)

 (10)

Ошибка формулы (10) пропорциональна h5.

Этот метод намного более точен, чем методы Эйлера, но требует и большего объема вычислений: положение точки (xi+1, yi+1) определяется в результате 4-кратного вычисления значения функции f (x,y). С появлением ЭВМ этот недостаток перестал быть существенным и метод Рунге-Кутта 4-го порядка применяется на практике чрезвычайно широко.

Число микроотрезков [xi; xi+1], на которые разбивается исходный отрезок [x0;xn], определяется требуемой точностью вычислений. Для достижения нужной точности задача решается несколько раз при последовательно удваиваемом числе микроотрезков n. Точность считается достигнутой, если при начальном и удвоенном числе n значения yi и y2i (в совпадающих точках x) отличаются не более чем на заданную величину:

, i =0, ..,n, (11)

где p – порядок точности метода.

Метод Ругне-Кутта обладает следующими свойствами:

1. Метод является одноступенчатым (чтобы найти , нужна информация о предыдущей точке, )
2. Не требует вычисления производных от f(x,y), а требует вычисления самой функции
3. Имеет небольшую погрешность

# 1.3 Выбор среды разработки

C++ Builder— программный продукт, инструмент быстрой разработки приложений (RAD), интегрированная среда программирования (IDE), система, используемая программистами для разработки программного обеспечения на языке программирования C++. Данный продукт позволяет создавать как консольные приложения, так и приложения с графическим интерфейсом.

Microsoft Visual Studio — линейка продуктов компании Microsoft, включающих интегрированную среду разработки программного обеспечения и ряд других инструментальных средств. С помощью данного продукта можно разрабатывать консольные приложения, приложения с графическим интерфейсом, а также веб-сайты, веб-приложения, веб-службы как в родном, так и в управляемом кодах для всех платформ, поддерживаемых Windows, Windows Mobile, Windows CE, .NET Framework, Xbox, Windows Phone .NET Compact Framework и Silverlight.

Для выполнения поставленной задачи был выбран программный продукт C++ Builder. Так как является более простым в использовании и соответствует всем необходимым требованиям для создания консольного приложения.

# Практическая часть

# 2.1 Программная реализация метода Рунге-Кутта 4-го порядка

дифференциальный уравнение программирование коши

Разработка программы начинается с описания функций.

Листинг 1 «описание функций»

Затем идет объявление и инициализация переменных, которые участвуют в вычислительном процессе: коэффициенты уравнений, границы отрезка, шаг, начальное условие.

Когда все нужные данные получены, мы переходим непосредственно к решению ОДУ методом Рунге – Кутта 4-го порядка и методом Эйлера.

Листинг 2 «программная реализация решения ОДУ методом Рунге – Кутта

4-го порядка»

Листинг 3 «программная реализация решения ОДУ методом Эйлера»

# Заключение

В ходе выполнения курсовой работы была реализована поставленная задача, а именно составлена программа, позволяющая решать обыкновенные дифференциальные уравнения методом Рунге – Кутта 4-го порядка.

В ходе тестирования программы были получены результаты, по которым видно, что результаты решения методом Рунге – Кутта 4-го порядка совпадают, с достаточной точностью, с аналитическим.

# Список использованных источников

1. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений: Т.2 – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином, 2001 - с. 363-375.
3. Копченова Н.В., Марон И.А., Вычислительная математика в примерах и задачах – М.: Наука, 1972. – 368 с.
4. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Visual_Studio>
5. <https://ru.wikipedia.org/wiki/C%2B%2B_Builder>